Tema 3. Concepto de Probabilidad

Presentación y Objetivos.

El **Cálculo de Probabilidades** estudia el concepto de probabilidad como medida de incertidumbre. En situaciones donde se pueden obtener varios resultados posibles, la Teoría de la Probabilidad proporciona métodos para cuantificar esa variabilidad en el resultado del experimento. Se describen tres interpretaciones de la misma, adecuadas según sea el contexto y las hipótesis de trabajo: clásica, frecuentista y la probabilidad como grado de confianza. Se ilustran los axiomas que verifica la probabilidad, que se cumplen bajo cualquier interpretación de la misma y su uso. Se dan reglas prácticas de asignación de probabilidades.

Los **Objetivos** de este Tema son:

1. Conocer las diferentes interpretaciones de la probabilidad.
2. Manejar la notación conjuntista para representar y operar con probabilidades.
3. Calcular probabilidades mediante la regla de Laplace.

Esquema Inicial.

1. Introducción
2. Interpretaciones de la probabilidad
3. Definición axiomática de la probabilidad
4. Cuantificación de la probabilidad
5. Anexo: Métodos de conteo para determinación de probabilidades

Desarrollo del Tema

1. Introducción

Cuando se estudia una muestra de una población, el problema central es inferir las propiedades de ésta a partir de la muestra. Para ello se necesita un modelo de la población, una representación simbólica de su comportamiento que permita esta generalización. La construcción de estos modelos es el objeto del Cálculo de Probabilidades. Hay que conocer bien las leyes básicas de la probabilidad para utilizar adecuadamente la metodología estadística. La Estadística indica cómo utilizar la información en aquellos casos en los que hay incertidumbre.

Se utilizarán modelos probabilísticos cuando no se encuentren modelos matemáticos que sirvan para determinar concretamente un fenómeno. Se denomina **fenómeno aleatorio** o **experimento**

aleatorio a aquél que puede dar lugar a varios resultados, sin que se sepa con certeza cuál de éstos va a ser observado.

A continuación se introducen las tres interpretaciones de la probabilidad.

2. Interpretaciones de la Probabilidad

2.1 Interpretación frecuentista

La probabilidad se interpreta como la frecuencia relativa con la que se obtendría un resultado si se repitiera el experimento un número grande de veces en condiciones similares. Así, la probabilidad sólo va a tener significado en el contexto de un experimento infinitamente repetible.

Ejemplo 1: Se quiere determinar la proporción de errores en la ejecución de un programa. Se observa, cada vez que se ejecuta el programa, el número de errores que aparecen. Si se aumenta el número de ejecuciones, la frecuencia relativa de errores cometidos con respecto al número de ejecuciones se aproximará cada vez más a la verdadera proporción de errores. En la tabla 1 se muestran los resultados para valores de ejecución n entre 20 y 1500.

Nº ejecuciones (n)	Nº errores (n_A)	Frecuencia relativa
20	1	0,05
60	2	0,033
100	6	0,01
320	8	0,025
500	9	0,018
840	16	0,019
1500	31	0,026

Tabla 1: Tabla del ejemplo 1

La frecuencia relativa tiende al valor 0,02 conforme n crece.

Ejemplo 2: La frecuencia relativa de salir cara al tirar una moneda tiende a 0,5 al aumentar el número de tiradas.

Así, se tiene la siguiente definición de probabilidad como frecuencia relativa.

Definición: Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_A de los resultados son favorables a un atributo A, se define la probabilidad del atributo A como el límite de $\frac{n_A}{n}$ conforme n se hace grande.

Los inconvenientes de esta interpretación son los siguientes:

- "Un número grande de veces" no está determinado, no puede interpretarse como un límite en el sentido del Análisis Matemático.
- "Bajo las mismas condiciones" no está bien especificado.
- El sistema observado puede variar con el tiempo y con él la frecuencia relativa.

Esta definición solamente se aplica a fenómenos que se repiten muchas veces. Entonces, ¿cómo se calcularía la probabilidad de que el lanzamiento de un nuevo videojuego tenga éxito, de que roben una valiosa joya, de que se produzca un accidente en una central nuclear, ...? ¿Qué pasa con estos fenómenos que sólo ocurren una vez, en los que no se puede generar una población homogénea en la que calcular la frecuencia relativa?

2.2 Interpretación clásica

Está basada en el concepto de resultados igualmente verosímiles.

Ejemplo 3: Si se lanza un dado una vez hay 6 posibles resultados que son mutuamente excluyentes (no puede aparecer más de un resultado a la vez) e igualmente verosímiles (sus frecuencias son prácticamente las mismas si se supone que el dado no está trucado y que el experimento se lleva a cabo un número suficientemente grande de veces).

Puede entonces pensarse que la probabilidad de obtener un 5 es la proporción de resultados que den 5 respecto al número total de resultados, es decir, 1/6.

Definición: Si un experimento aleatorio tiene n resultados posibles igualmente verosímiles y mutuamente excluyentes y si n_B de ellos tienen un atributo B, la probabilidad de B es la proporción $\frac{n_B}{n}$.

Ejemplo 4: En el lanzamiento de 2 dados, la probabilidad de que la suma de los resultados sea 7 es 1/6, ya que hay 36 resultados posibles y 6 tienen el atributo de sumar 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5, 2) y (6, 1).

Los inconvenientes de esta visión son:

- En muchas situaciones prácticas los resultados posibles de un experimento no son igualmente posibles y entonces éste no es un método sistemático de asignar probabilidades.
- Se basa, al igual que la interpretación anterior, en la repetición de experimentos realizados bajo las mismas condiciones.

2.3 Interpretación subjetiva

Se asocia la probabilidad con el observador del sistema en vez de con el sistema bajo observación. Surge para los fenómenos que no se prestan a repetición y cuando no es posible hablar de un experimento llevado a cabo bajo condiciones similares.

Muchas personas hacen afirmaciones que de algún modo implican probabilidad. Por ejemplo, cuando un corredor de bolsa asesora a un cliente sobre la posibilidad de que determinadas acciones suban, está sugiriendo alguna idea de la probabilidad de ocurrencia del alza de esa acción.

En estos casos la probabilidad se interpreta como una medida personal de la incertidumbre de un suceso, basada en experiencias previas.

La probabilidad representa entonces un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible, representa una medida del grado de creencia o de convicción de un individuo (observador del sistema) respecto a la ocurrencia de una afirmación.

El principal inconveniente de esta interpretación es que, como cada individuo asigna un número a que suceda un hecho determinado, es muy difícil poner en común a varios analistas. Además, el hecho de que esté basado en un juicio personal proporciona inconsistencia a la definición.

3. Definición axiomática de Probabilidad.

Para evitar tantos inconvenientes la probabilidad se definió axiomáticamente en los años 30: se establecen algunos axiomas y con base a éstos, se define formalmente la probabilidad. El desarrollo axiomático incluye las tres interpretaciones de la probabilidad: sus propiedades se corresponden con las de la frecuencia relativa y se encuadran dentro de la teoría general de la medida. De esta forma, la probabilidad sería una medida de incertidumbre, con propiedades similares a las medidas de longitudes, tiempo, etc.

La definición formal de probabilidad, a través de un conjunto de axiomas debidos a Kolmogorov, se fundamenta en la teoría de conjuntos. Esta definición es tan general que permite incorporar las distintas interpretaciones de la probabilidad antes mencionadas.

Previamente se exponen algunos conceptos necesarios para introducir la definición axiomática.

3.1 Conceptos básicos

3.1.1 Espacio muestral

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se denotará como **Ω**. Puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Ejemplo 5:

- Ω finito: número de libros prestados en una biblioteca.
- Ω infinito numerable: número de trabajos enviados a una impresora.
- Ω infinito no numerable: duración de un determinado componente.

Ejemplo 6: Considérese el experimento de introducir 2 bolas en 2 urnas A y B.

- Ω = {AA, AB, BA, BB} si las bolas son distinguibles.
- Ω = {AA, AB, BB} si las bolas son indistinguibles.

3.1.2. Suceso

Se llama **suceso** o **evento** a cualquier subconjunto de **Ω**. Un suceso es **elemental** si está formado por un solo elemento y **compuesto** si es unión de sucesos elementales. **Ω** es el **suceso seguro** y Ø el **suceso imposible** o nulo o vacío (nunca ocurre).

Ejemplo 7: En el lanzamiento de un dado, **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y el suceso "obtener par" será el conjunto {2, 4, 6}. El subconjunto {1} es un suceso elemental.

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral **Ω**, se definen las siguientes operaciones con sucesos:

- $A \subset B$: *suceso contenido en otro*. Siempre que ocurre el suceso A ocurre el suceso B.
- $A \cup B$: *unión de sucesos*. Ocurre siempre que ocurre A o siempre que ocurre B (o ambos).
- $A \cap B$: *intersección de sucesos*. Ocurre siempre que ocurren A y B simultáneamente.
- $\overline{A}$: *suceso complementario o contrario* de otro dado A. Ocurre siempre que no ocurre el suceso A: $\overline{A} = A^c = \Omega \setminus A$.
- $A \setminus B$: *diferencia de sucesos*. Ocurre siempre que ocurre A y no B: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- $A \,\Delta\, B$: *diferencia simétrica de sucesos*: $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Si $A \cap B = Ø$, los sucesos son **incompatibles** o **disjuntos** o **mutuamente excluyentes**.

El lenguaje de los sucesos es el mismo que el de conjuntos, con lo que las definiciones anteriores se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn, como se ilustra en la figura 1.

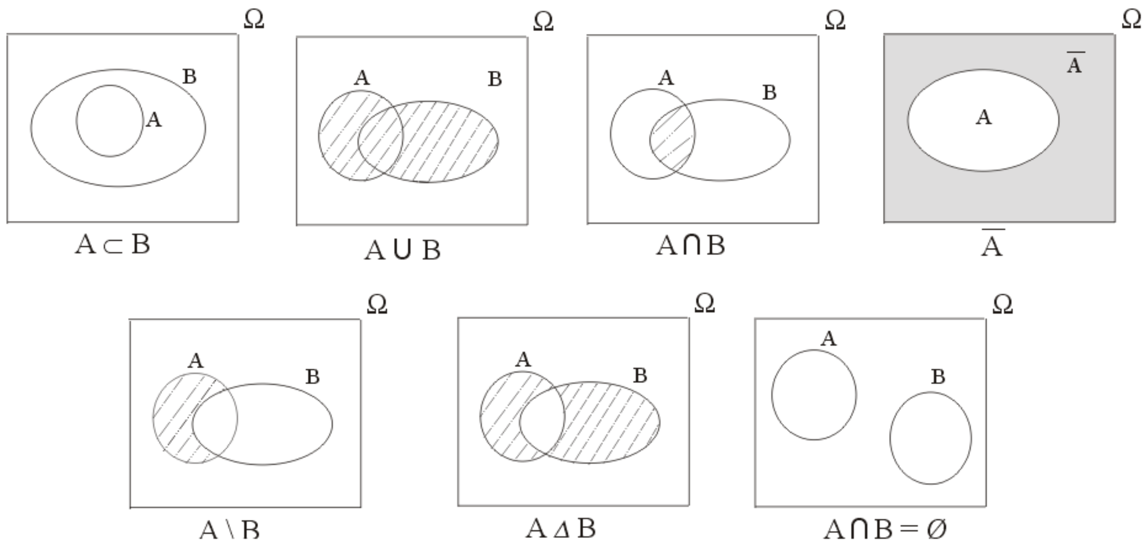

Figura 1: Diagramas de Venn para las operaciones habituales con sucesos

La clase de los sucesos asociados a un experimento aleatorio verifica las siguientes propiedades para las operaciones de unión (∪) e intersección (∩).

1. Conmutativa y asociativa.
2. Cada operación es distributiva respecto de la otra.
3. Existe elemento neutro para la unión (Ø) y para la intersección (Ω).
4. Existe para cada suceso A, otro suceso $\overline{A}$ tal que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ y $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Esto quiere decir que la clase de los sucesos asociados a un experimento aleatorio tiene estructura de **álgebra de Boole**. Por lo tanto, se verifican las propiedades:

- Idempotencia: $A \cup A = A, A \cap A = A$.
- Leyes De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Un **sistema completo de sucesos** o **partición del espacio muestral** es el conjunto de sucesos $\{A_i\}_{i \in N}$ tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ y son disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo 8: El conjunto de los sucesos elementales es una partición del espacio muestral Ω.

A continuación se presenta la definición axiomática de probabilidad. Dado el espacio muestral Ω asociado a un experimento y $\mathcal{P}(\Omega)$ la σ-álgebra formada por todos los posibles subconjuntos de Ω, se trata de establecer una medida de incertidumbre para los sucesos de este experimento, asignando un número real a cada suceso.

3.2 Axiomática de Kolmogorov

Una probabilidad en (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$) es una función P definida sobre la σ-álgebra sobre la recta real $\mathbb{R}$.

$$P\colon\ \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow\ \mathbb{R}$$

$$A\ \longrightarrow P(A)$$

verificando las condiciones siguientes:

1) Para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Propiedad de σ-aditividad: Para todo $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\ \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjuntos dos a dos se tiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Se llama **espacio probabilístico** a la terna (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, P).

Estos tres axiomas son razonables para las interpretaciones ya vistas de la probabilidad. Esta definición muestra las características de las proporciones o frecuencia relativa que son un número entre 0 y 1. Además, dado que cuándo se realiza un experimento siempre ocurre un resultado, la probabilidad de Ω es 1, y si no hay ningún resultado común entre dos sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A o B es la proporción de veces que ocurre A más la proporción de veces que ocurre B.

Como consecuencia de los axiomas se tienen las siguientes propiedades:

1) $P(\emptyset) = 0$
2) $P(A) \leq 1$ para todo A
3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4) Propiedad monótona: Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
5) Regla de adición de probabilidades: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para cualesquiera A, B
6) Generalización de la anterior:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

7) Propiedad subaditiva:

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

8)

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) \geq 1 - \sum_n P(\bar{A}_n)$$

Ejemplo 9: Una computadora biprocesador de una gran empresa funciona si cualesquiera de sus dos procesadores A y B funciona. Sabiendo que la probabilidad de que el procesador A funcione es 0,85, la de B es 0,9 y la de que ambos funcionen simultáneamente es 0,76, calcular la probabilidad de que la computadora funcione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}85 + 0{,}9 - 0{,}76 = 0{,}99$$

4. Cuantificación de la Probabilidad.

4.1 Regla de Laplace (Probabilidad clásica)

En muchas situaciones todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir, son equiprobables. Esto sucede en los juegos de azar como en problemas de lanzamiento de dados, de monedas, extracción de cartas de una baraja, etc.

Si existen n sucesos elementales equiprobables, la probabilidad de cada uno de ellos será $\frac{1}{n}$ de manera que la suma total sea 1. Un suceso compuesto A formado por k sucesos elementales tendrá probabilidad $\frac{k}{n}$ lo que da lugar a la **regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ posibles}$$

Para contar este número de casos favorables y casos posibles se utiliza el análisis combinatorio.

La regla de Laplace solamente debe usarse en contextos en los que esté asegurada la equiprobabilidad de los sucesos.

4.2 Ruleta de la Fortuna (Probabilidad subjetiva)

Se introduce un experimento de referencia que actúa como "regla" y que se usa para cuantificar las creencias de un individuo llamado decisor. Así, el decisor puede expresar sus creencias respecto a proposiciones sobre el experimento de referencia.

Se considera una ruleta de la fortuna (equilibrada) aunque se puede hacer con cualquier dispositivo de azar como urnas, bolas de colores, ... Se comparan los sucesos a cuantificar con sectores en la ruleta de la fortuna, de tal forma que si por ejemplo el decisor piensa que es

igualmente probable el que ocurra un suceso A con que la aguja de la ruleta caiga en un sector de área $x\%$, se asignaría a ese suceso una probabilidad de $\frac{x}{100}$ (por ejemplo, si fuera el 20%, $P(A) = 0{,}2$). Cuando existen varios sucesos a cuantificar, como las probabilidades se calculan de manera independiente, hay que comprobar que la suma es 1, y en caso contrario hacer una pequeña modificación.

5. Anexo: Métodos de conteo para determinación de probabilidades.

En muchos casos, como en algunos juegos de azar, se trabaja con espacios muestrales finitos en los que los sucesos elementales son equiprobables. Como ya se ha visto, en estos casos se utiliza la regla de Laplace para determinar la probabilidad de sucesos compuestos, y por tanto se necesita determinar cuántas situaciones se consideran favorables y cuántas posibles. Para ello se utiliza el **Análisis Combinatorio**.

A continuación se muestran algunas definiciones previas.

Población es una colección finita o infinita de elementos, que va a ser el conjunto de referencia sobre el que van a recaer las observaciones.

Muestra de tamaño *r* es un subconjunto de la población con *r* elementos.

Muestreo es la toma de la muestra. Se utilizará el muestreo aleatorio, es decir, se supone que la muestra se selecciona mediante un experimento aleatorio. Existen dos tipos de muestreo:

- Sin reemplazamiento
- Con reemplazamiento

Extraídos r elementos de la población por cualquiera de los dos procedimientos, se puede considerar que esos elementos están:

- Ordenados: originando las muestras ordenadas
- Sin ningún orden: originando las muestras sin ordenar o subpoblaciones.

Así, en este contexto se tienen 4 tipos básicos de muestreo aleatorio:

- Sin reemplazamiento y los objetos ordenados
- Con reemplazamiento y los objetos ordenados
- Sin reemplazamiento y los objetos no ordenados
- Con reemplazamiento y los objetos no ordenados

Para contar el número de veces que pueden ocurrir todos los sucesos que se pueden observar se utiliza el **principio fundamental del conteo o regla de multiplicación** que se expresa de la siguiente forma: Dados k conjuntos A_1, A_2, ..., A_k cada uno con un número de elementos n_1,

n_2,..., n_k respectivamente, se pueden formar $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ ordenaciones de la forma $(x_1, \dots, x_k)$ donde x_1 es un elemento de A_1, …, x_k es un elemento de A_k.

Ejemplo 10: Se quiere clasificar un colectivo de personas según su sexo (hombre, mujer), estado civil (soltero, casado, viudo) e idioma (considérense 10 básicos). Determinar el número de clases que se obtendrán.

$$2 \cdot 3 \cdot 10 = 60 \text{ clases}$$

Este principio establece que todos los posibles resultados en una situación determinada se pueden encontrar multiplicando el número de formas en la que puede suceder cada suceso, y es la base para desarrollar otros conceptos como variaciones y combinaciones que se presentan a continuación.

5.1 Sin reemplazamiento y ordenados

Para determinar todas las muestras diferentes de tamaño r que se pueden seleccionar sin reemplazamiento de una población de tamaño n y en la que los objetos están ordenados (importa el orden en el que están colocados) se utilizan las variaciones.

Variaciones de n elementos tomados de r en r, son los diferentes grupos de r elementos que se pueden formar con los n elementos, de forma que dos grupos son distintos si tienen algún elemento distinto o si están en distinto orden. Se denotan con $V_{n,r}$.

Utilizando el principio fundamental de conteo se obtiene cuántos grupos hay. Para la primera posición se puede seleccionar cualquiera de los n elementos, para la segunda como ya se ha extraído un elemento de la población y el muestreo es sin reemplazamiento, se tienen $n-1$ opciones, para la tercera $n-2$, … Siguiendo con este razonamiento para la última posición ya se han utilizado $r-1$ elementos, quedando $n-(r-1) = n-r+1$ elementos entre los que se seleccionará este último. Así,

$$V_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

Si $r = n$ se corresponde con ordenar n elementos, y se obtienen las **permutaciones de n elementos** que son las distintas ordenaciones de dichos elementos.

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

Ejemplo 11: Con las letras distintas de la palabra PROBABILIDAD, formar palabras de 3 letras diferentes (aunque carezcan de significado). ¿Cuántas de ellas empiezan por P? ¿Cuántas empiezan por P y acaban en D?

En total se pueden formar $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ palabras, de las cuales empiezan por P $V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$ y las que empiezan por P y acaban en D son $V_{6,1} = 6$.

5.2 Con reemplazamiento y ordenados

Cuando se vuelve a introducir el elemento observado en la población antes de la siguiente extracción, se obtienen las variaciones con repetición.

Variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r, son los diferentes grupos de r elementos que se pueden formar con los n elementos, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de forma que dos grupos son distintos si tienen algún elemento distinto o si están en distinto orden. Es decir, son las variaciones ordinarias pero admitiendo la posibilidad de que se repitan elementos en un mismo grupo. Se denotan con $VR_{n,r}$.

Ahora se tienen n opciones en cada una de las extracciones por ser con reemplazamiento. Así,

$$VR_{n,r} = n^r$$

Una aplicación inmediata de las variaciones con repetición es a los problemas de ocupación de r bolas en n celdas, considerando las bolas como distinguibles. Representan las formas posibles de meter las r bolas en las n celdas.

Ejemplo 12: Formas posibles de rellenar una quiniela de 14.

$$VR_{3,14} = 3^{14}$$

5.3 Sin reemplazamiento y no ordenados

Cuando el muestreo se realiza sin reemplazamiento y no importa el orden de los elementos dentro del grupo, se obtienen las combinaciones.

Combinaciones de n elementos tomados de r en r, son los diferentes grupos de r elementos que se pueden formar con los n elementos, de forma que dos grupos son distintos si tienen algún elemento distinto. Las combinaciones son subpoblaciones o subconjuntos. Se denotan con $C_{n,r}$.

Las subpoblaciones (combinaciones) y las muestras ordenadas sin reemplazamiento (variaciones) sólo se diferencian en el orden. Una subpoblación determinada de tamaño r dará lugar a $r!$ muestras ordenadas de tamaño r. Así,

$$C_{n,r} = \frac{V_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}, \quad r \leq n$$

Estos números se llaman números combinatorios o coeficientes binomiales. Algunas de sus propiedades son las siguientes:

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ y de ahí $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Ejemplo 13: Se ha de seleccionar a 5 profesores de un departamento para formar parte de un tribunal. Supóngase que el director de departamento debe elegirlos de entre 10 hombres y 4 mujeres. Si éste decide que de los 5 profesores 3 sean hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas formas puede lograrse lo anterior?

- Formas de seleccionar 3 hombres de 10:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

- Formas de seleccionar 2 mujeres de entre 4:

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Por tanto, el número de maneras en que ambos pueden ocurrir es $120 \cdot 6 = 720$.

5.4 Con reemplazamiento y no ordenados

En este caso se utilizan las combinaciones con repetición.

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r, son los diferentes grupos de r elementos que se pueden formar con los n elementos, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de forma que dos grupos son distintos si tienen algún elemento distinto. Las combinaciones son subpoblaciones o subconjuntos. Es decir, son las combinaciones ordinarias pero admitiendo la posibilidad de que se repitan elementos de un mismo grupo. Se denotan con $CR_{n,r}$.

Al ser un muestreo con reemplazamiento, serán necesarios r reemplazamientos, con lo que se puede considerar como una selección sin reemplazamiento, en la que se tiene en cuenta el orden de los elementos, de r elementos de una población con $n + r - 1$ elementos. Así,

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r}$$

Las combinaciones con repetición se utilizan en los problemas de ocupación de r bolas en n celdas, cuando las bolas son indistinguibles.

Ejemplo 14: ¿Cuántos resultados posibles se obtienen al lanzar 5 dados indistinguibles?

$$CR_{6,5} = \binom{10}{5}$$

5.5 Particiones

Se denomina **partición de tamaño r de una población de tamaño n** a una división de la población en r grupos ordenados de elementos desordenados tal que

- El grupo i-ésimo tiene n_i elementos ($i = 1, \ldots, r$)
- $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$

Es decir, se está dividiendo la población en r subpoblaciones (dentro de cada grupo no se tiene en cuenta el orden de los elementos) y se tiene en cuenta el orden de tales subpoblaciones.

5.5.1 Permutaciones con repetición

Las **permutaciones con repetición de r elementos distintos tales que el primero aparece n_1 veces, …, el r-ésimo n_r veces**, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, son los diferentes grupos que se pueden formar con los r elementos distintos de forma que en cada grupo cada elemento aparezca n_1, …, n_r veces respectivamente y esto en un orden determinado. Se denotan con $PR^n_{n_1,\ldots,n_r}$.

Esto equivale a determinar el número de particiones distintas de tamaño r en las que se pueden dividir los n elementos de forma que el primer grupo tenga tamaño n_1, …, el r-ésimo grupo tamaño n_r. Se puede demostrar que

$$PR^n_{n_1,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

Son los coeficientes multinomiales.

Ejemplo 15: Se reparten las 40 cartas de una baraja entre 4 jugadores. Calcular la probabilidad de que cada jugador tenga un as.

- Casos posibles:
$$PR^{40}_{10,10,10,10} = \frac{40!}{(10!)^4}$$
- Casos favorables:
Si le toca un as a cada jugador, las 36 cartas restantes se pueden repartir en 4 grupos de 9 cartas de $PR^{36}_{9,9,9,9}$ formas.

Y las formas de repartir los 4 ases entre los 4 jugadores son $P_4 = 4!$, con lo que los casos favorables son

$$4! \cdot PR^{36}_{9,9,9,9}$$

Así, por la regla de Laplace, la probabilidad pedida es

$$\frac{4! \cdot PR^{36}_{9,9,9,9}}{PR^{40}_{10,10,10,10}}$$